

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΑ 5 ΜΑΪΟΥ 2025
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: 4

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln |x|$, $x \in \mathbb{R}^*$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει:

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$$

Μονάδες 6

- A2.** Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

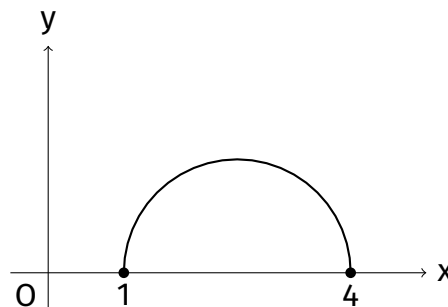
Μονάδες 4

- A3.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle.

Μονάδες 5

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- i. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, η οποία δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε η f παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές στο $[\alpha, \beta]$.
- ii. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .
- iii. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δίνεται από το παρακάτω σχήμα,



τότε υπάρχει $x_0 \in (1, 4)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

- iv. Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = -\infty$.

- ν. Κάθε συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{5x+1}{x-5}$, $x \in \mathbb{R} - \{5\}$.

- B1.** Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται στο $\mathbb{R} - \{5\}$ (Μονάδες 3) και ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες (Μονάδες 6).

Μονάδες 9

- B2.** Να αποδείξετε ότι $(f \circ f)(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{5\}$.

Μονάδες 4

- B3.** Να εξετάσετε αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για την f στο διάστημα $[6, 7]$. Εφόσον πληρούνται, να το εφαρμόσετε και να βρείτε όλα τα $\xi \in (6, 7)$ που το επαληθεύουν.

Μονάδες 6

- B4.** Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία $y = 5$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = 1$ και $x = 4$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \ln x}{1-x} & , \text{αν } 0 < x \neq 1 \\ f(1) & , \text{αν } x = 1 \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f(1) + 1)x^3 + 2x^2 - 3}{x^2 + 1} = 2$.

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι $f(1) = -1$.

Μονάδες 4

Για

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \ln x}{1-x} & , \text{αν } 0 < x \neq 1 \\ -1 & , \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 5

Γ3. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = (1-x)^2 + 2x(\ln x + 1 - x)$.

i. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ και να βρεθεί το πρόσημό της.

Μονάδες 5

ii. Με τη βοήθεια του (i) και γνωρίζοντας ότι η f' είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 3

Γ4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

$$\int_1^2 f(x)dx > -\frac{5}{4}$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$g'(x) = \frac{e^x + 1}{e^{g(x)}}, \quad x \geq 0$$

και $g(0) = 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $g(x) = \ln(e^x + x)$, $x \geq 0$.

Μονάδες 3

Αν

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & , \text{αν } x < 0 \\ g(x) & , \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

Δ2. i. Να βρεθεί, αν υπάρχει, κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 2

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{e^{g(x)} - g(x)}{x} + \frac{g(x)}{x - 2025} = 0$$

έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(0, 2025)$.

Μονάδες 5

Δ4. Σημείο M με θετική τετμημένη κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της f . Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι 1cm/sec . Αν N η προβολή του M στον άξονα x' και σημείο $A(0, \alpha)$, $\alpha > 0$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου AMN τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τετμημένη του M είναι 2cm .

Μονάδες 5

Δ5. Να λύσετε την εξίσωση

$$f(e^{x^2} - 1) + f(|x| - |\eta\mu x|) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους / τις εξεταζόμενες)

- 1. Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
- 2.** Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
- 3.** Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
- 4.** Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
- 5.** Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
- 6.** Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10:00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ